Note sulla Serie di Fourier

Nicola Vincenti

Pisa, Febbraio 2016

Questo articolo si può prendere come esempio per una breve introduzione al calcolo dei coefficienti della Serie di Fourier. Si rimanda il lettore a uno studio più approfondito su pubblicazioni e libri se necessaria una formale esposizione dell'argomento. Vale la pena, tuttavia, avere un prontuario dove si possa impostare calcoli complicati in maniera semplice e informale.

Data una funzione periodica di periodo T_0, dichiarata x(t). Vale la relazione:

$$x(t) = x(t + T_0), \quad \forall t, T_0 \in R$$

Possiamo dunque calcolarne i coefficienti della serie di Fourier, in fase e in quadratura, secondo la seguente formula:

$$X_{0,n} = \frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} x(t)cos(2\pi n f_0 t)dt \quad \forall n \in N$$

$$X_{1,n} = \frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} x(t)sin(2\pi n f_0 t)dt \quad \forall n \in N - \{0\}$$

così ché si possa valere la seguente relazione:

$$x(t) = X_{0,0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{0,k}\, cos(2\pi k f_0 t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{1,k}\, sin(2\pi k f_0 t)$$

Vediamo dunque alcuni esempi di funzioni base, che combinate linearmente possono essere una buona risorsa per costruire alcune utili funzioni di test.

Sia data la funzione x(t) così dichiarata:

$$x(t) = A, \quad 0 \leq t \leq \delta T_0$$
$$x(t) = 0, \quad \delta T_0 < t < T_0$$

Calcoliamo adesso i coefficienti $X_{0,n}$:

$$X_{0,n} = \frac{1}{T_0} \int\limits_0^{\delta T_0} Acos(2\pi n f_0 t)dt = \frac{1}{T_0}\left.\frac{Asin(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0}\right|_0^{\delta T_0} =$$

$$= \left.\frac{Asin(2\pi n f_0 t)}{2\pi n}\right|_0^{\delta T_0} = \frac{Asin(2\pi n f_0 \delta T_0)}{2\pi n} = \frac{Asin(2\pi n \delta)}{2\pi n}$$

Si noti che nel caso di n = 0 abbiamo

$$X_{0,0} = \frac{Asin(2\pi n \delta)}{2\pi n \delta} \cdot \delta = A\delta$$

che è appunto il valor medio sul periodo della funzione x(t).
Possiamo quindi calcolare anche i coefficienti in quadratura

$$X_{1,n} = \frac{1}{T_0} \int\limits_0^{\delta T_0} Asin(2\pi n f_0 t)dt = \frac{1}{T_0}\left.\frac{-Acos(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0}\right|_0^{\delta T_0} = \frac{-Acos(2\pi n \delta) + A}{2\pi n} =$$

$$= \frac{A}{2\pi n}[1 - cos(2\pi n \delta)]$$

concludendo la funzione x(t) può essere ricostruita secondo la seguente formula

$$x(t) = X_{0,0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{0,k}\, cos(2\pi k f_0 t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{1,k}\, sin(2\pi k f_0 t) =$$

$$= A\delta + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Asin(2\pi k\delta)}{2\pi k} cos(2\pi k f_0 t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A}{2\pi k}[1 - cos(2\pi k\delta)] sin(2\pi k f_0 t)$$

In fig. 1 viene riportata la ricostruzione del segnale Finv [F [x(t)]] e la funzione x(t).

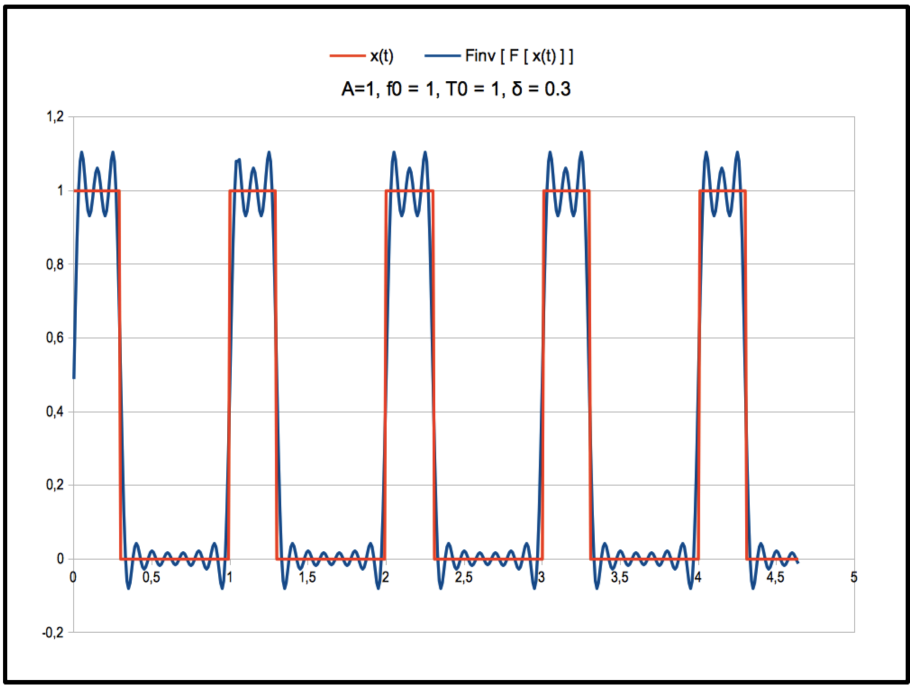

fig. 1

In fig. 2 viene mostrato il grafico del modulo delle prime 10 armoniche di x(t)

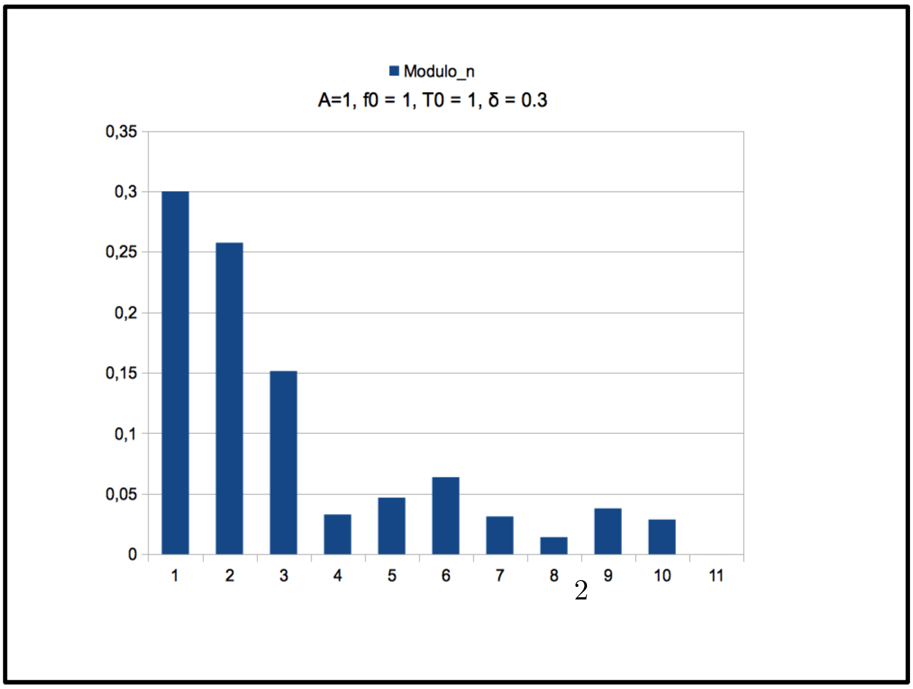

fig. 2

In fig. 3 viene mostrato il grafico della fase delle prime 10 armoniche di x(t)

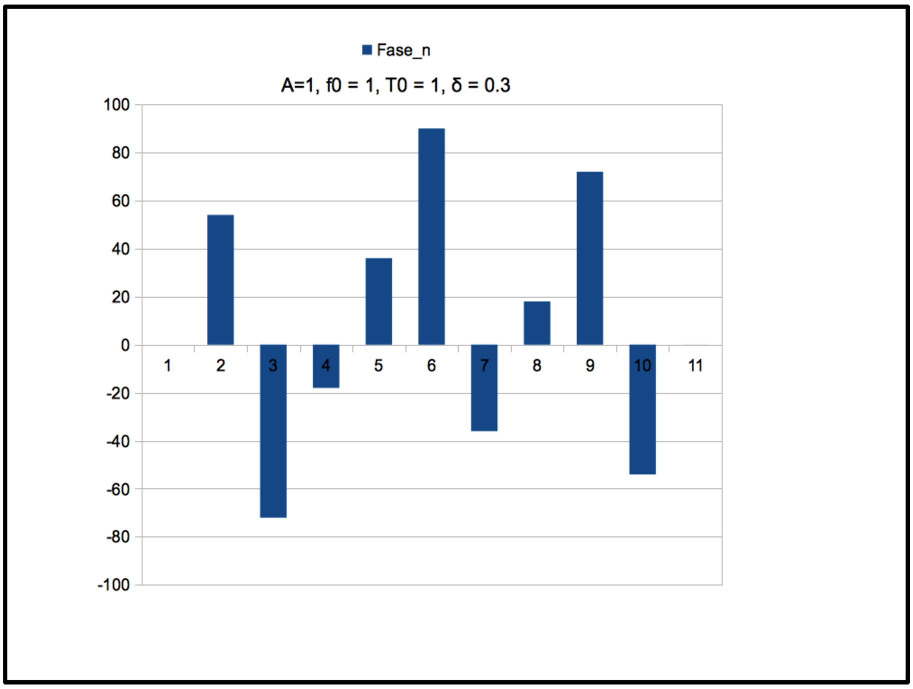

fig. 3

Un altro esempio tipico di segnale periodico è il dente di sega così dichiarato:

$$x(t) = \frac{At}{\delta T_0}, \quad 0 \leq t \leq \delta T_0$$

$$x(t) = 0, \quad \delta T_0 < t < T_0$$

troviamo quindi:

$$X_{0,n} = \frac{1}{T_0} \int_0^{\delta T_0} \frac{At}{\delta T_0} cos(2\pi n f_0 t) dt$$

integrando per parti si ottiene

$$= \frac{1}{T_0} \left[\left. \frac{At sin(2\pi n f_0 t)}{2\pi n f_0 \delta T_0} \right|_0^{\delta T_0} - \int_0^{\delta T_0} + \frac{A}{\delta T_0 2\pi n f_0} \cdot sin(2\pi n f_0 t) dt \right] =$$

$$= \frac{Asin(2\pi n\delta)}{2\pi n} + \frac{A \cdot cos(2\pi n f_0 t)}{4\pi^2 n^2 \delta}\Bigg|_0^{\delta T_0} =$$

$$= \frac{Asin(2\pi n\delta)}{2\pi n} + \frac{A}{4\pi^2 n^2 \delta}[cos(2\pi n\delta) - 1]$$

nel caso dei coefficienti in quadratura invece:

$$X_{1,n} = \frac{1}{T_0}\int_0^{\delta T_0} \frac{At}{\delta T_0} sin(2\pi n f_0 t)dt$$

integrando per parti si ottiene

$$= \frac{1}{T_0}\left[\frac{-At}{2\pi n f_0 \delta T_0} cos(2\pi n f_0 t)\Bigg|_0^{\delta T_0} + \int_0^{\delta T_0} \frac{A}{2\pi n f_0 \delta T_0} cos(2\pi n f_0 t)dt\right] =$$

$$= \frac{-A}{2\pi n} cos(2\pi n\delta) + \frac{A}{4\pi^2 n^2 \delta f_0 T_0} sin(2\pi n f_0 t)\Bigg|_0^{\delta T_0} =$$

$$= \frac{-A}{2\pi n} cos(2\pi n\delta) + \frac{A}{4\pi^2 n^2 \delta} sin(2\pi n\delta)$$

riassumendo la funzione x(t) può essere ricostruita come

$$x(t) = X_{0,0} + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{0,k}\, cos(2\pi k f_0 t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_{1,k}\, sin(2\pi k f_0 t) =$$

$$= \frac{A\delta}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{Asin(2\pi k\delta)}{2\pi k} + \frac{A}{4\pi^2 k^2 \delta}[cos(2\pi k\delta) - 1]\right\} cos(2\pi k f_0 t) +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{-A}{2\pi k} cos(2\pi k\delta) + \frac{A}{4\pi^2 k^2 \delta} sin(2\pi k\delta)\right\} sin(2\pi k f_0 t)$$

In fig. 4 viene riportata la ricostruzione del segnale Finv [F [x(t)]] e la funzione x(t).

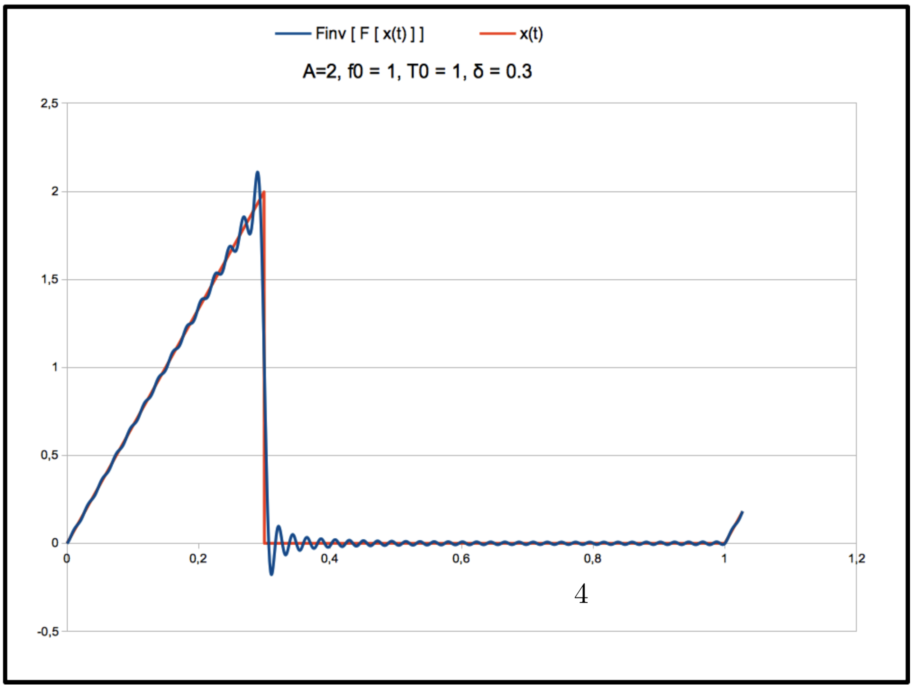

fig. 4

In fig. 5 viene mostrato il grafico del modulo delle prime 10 armoniche di x(t)

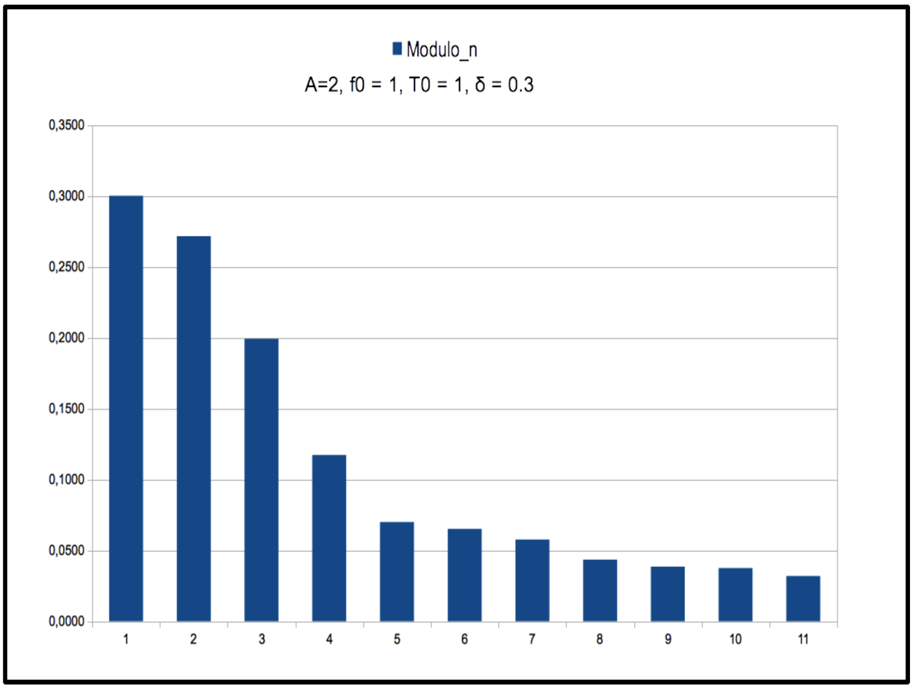

fig. 5

mentre in fig. 6 è riportato il grafico della fase delle prime 10 armoniche di x(t)

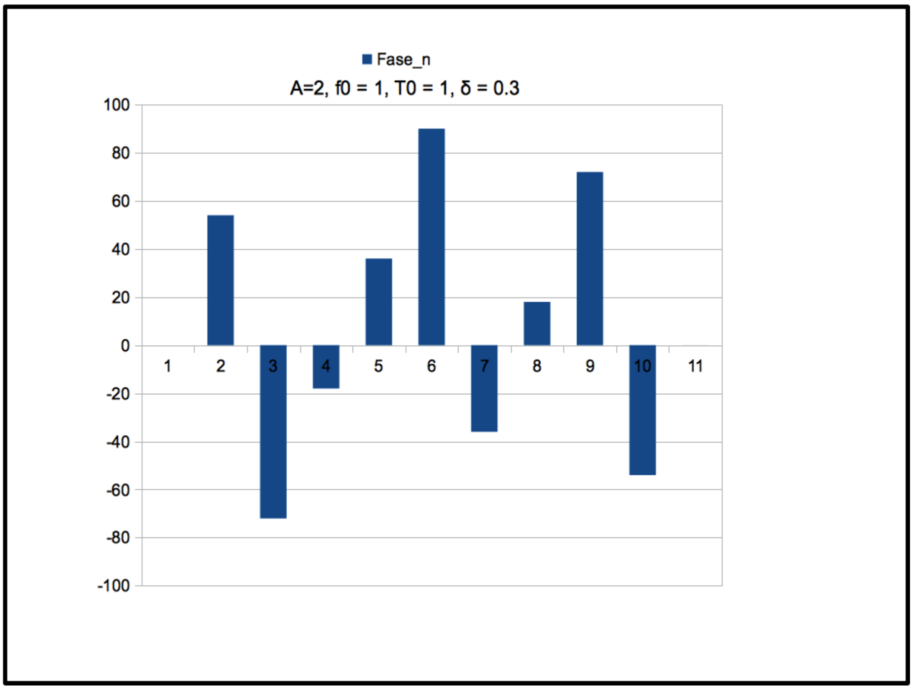

fig. 6

Un altro esempio significativo è la funzione esponenziale decrescente così dichiarata:

$$x(t) = A \cdot e^{\frac{-kt}{T_0}}, \quad 0 \leq t \leq T_0$$

per calcolare i termini della serie, dobbiamo sviluppare il seguente procedimento:

$$X_{0,n} = \frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} A \cdot e^{\frac{-kt}{T_0}} cos(2\pi n f_0 t) dt$$

visto però che il calcolo risulta poco maneggevole, si può affrontare lo stesso problema, integrando in principio come segue:

$$\int e^{-at} cos(bt) dt$$

per parti si ottiene

$$= \frac{e^{-at} sin(bt)}{b} + \int a \cdot e^{-at} \frac{sin(bt)}{b} dt = \frac{e^{-at} sin(bt)}{b} + \frac{a}{b} \int e^{-at} sin(bt) dt =$$

di nuovo per parti:

$$= \frac{e^{-at} sin(bt)}{b} + \frac{a}{b}(-\frac{e^{-at} cos(bt)}{b}) - \frac{a}{b} \int +a \cdot e^{-at} \frac{cos(bt)}{b} dt =$$

$$= \frac{e^{-at} sin(bt)}{b} - \frac{a}{b^2} \cdot e^{-at} cos(bt) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{-at} cos(bt) dt =$$

riconoscendo l'ultimo termine, si può ricavare l'integrale indefinito da cui eravamo partiti, secondo la seguente relazione

$$(1 + \frac{a^2}{b^2}) \int e^{-at} cos(bt) dt = \frac{e^{-at} sin(bt)}{b} - \frac{a}{b^2} \cdot e^{-at} cos(bt)$$

$$\int e^{-at} cos(bt) dt = \frac{b \cdot e^{-at} sin(bt)}{a^2 + b^2} - \frac{a \cdot e^{-at} cos(bt)}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{e^{-at}(b sin(bt) - a cos(bt))}{a^2 + b^2}$$

quindi, a proposito dello sviluppo in serie dell'esponenziale decrescente, abbiamo

$$X_{0,n} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \cdot e^{-\frac{kt}{T_0}} cos(2\pi n f_0 t) dt$$

per cui basta sfruttare la posizione:

$$a := \frac{k}{T_0}, \quad b := 2\pi n f_0$$

ottenendo

$$X_{0,n} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \cdot e^{-\frac{kt}{T_0}} cos(2\pi n f_0 t) dt =$$

$$= \frac{A}{T_0} \left. \frac{e^{-\frac{k}{T_0} t} \left[2\pi n f_0 sin(2\pi n f_0 t) - \frac{k}{T_0} cos(2\pi n f_0 t) \right]}{\frac{k^2}{{T_0}^2} + 4\pi^2 n^2 f_0^2} \right|_0^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{T_0} \frac{e^{-k}[\frac{2\pi n}{T_0} sin(2\pi n) - \frac{k}{T_0} cos(2\pi n)]}{\frac{k^2}{{T_0}^2} + \frac{4\pi^2 n^2}{{T_0}^2}} + \frac{A}{T_0} \frac{\frac{k}{T_0}}{\frac{k^2}{{T_0}^2} + \frac{4\pi^2 n^2}{{T_0}^2}} =$$

$$= A\left\{ \frac{e^{-k}[2\pi n sin(2\pi n) - k cos(2\pi n)]}{k^2 + 4\pi^2 n^2} + \frac{k}{k^2 + 4\pi^2 n^2} \right\}$$

$$= A\left\{ \frac{-ke^{-k} + k}{k^2 + 4\pi^2 n^2} \right\} = \frac{Ak}{k^2 + 4\pi^2 n^2} \cdot (1 - e^{-k})$$

con procedimenti del tutto analoghi, per i coefficienti in quadratura si trova:

$$X_{1,n} = A\left\{ \frac{e^{-k}[-2\pi n cos(2\pi n) - k sin(2\pi n)]}{k^2 + 4\pi^2 n^2} + \frac{2\pi n}{k^2 + 4\pi^2 n^2} \right\} =$$

$$= A\left\{ \frac{e^{-k}[-2\pi n]}{k^2 + 4\pi^2 n^2} + \frac{2\pi n}{k^2 + 4\pi^2 n^2} \right\} = \frac{A \cdot 2\pi n}{k^2 + 4\pi^2 n^2} \cdot (1 - e^{-k})$$

Riassumendo la funzione x(t) può essere ricostruita come segue:

$$x(t) = X_{0,0} + 2\sum_{m=1}^{\infty} X_{0,m} \, cos(2\pi m f_0 t) + 2\sum_{m=1}^{\infty} X_{1,m} \, sin(2\pi m f_0 t) =$$

$$= A\frac{1 - e^{-k}}{k} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{A \cdot k}{k^2 + 4\pi^2 m^2} \cdot (1 - e^{-k}) cos(2\pi m f_0 t) \right\} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{A \cdot 2\pi m}{k^2 + 4\pi^2 m^2} \cdot (1 - e^{-k}) sin(2\pi m f_0 t) \right\}$$

Possiamo quindi riportare i grafici della ricostruzione, e di modulo e fase dei coefficienti.
In fig. 7 viene mostrato il grafico di x(t) e della ricostruzione Finv[F[x(t)]].

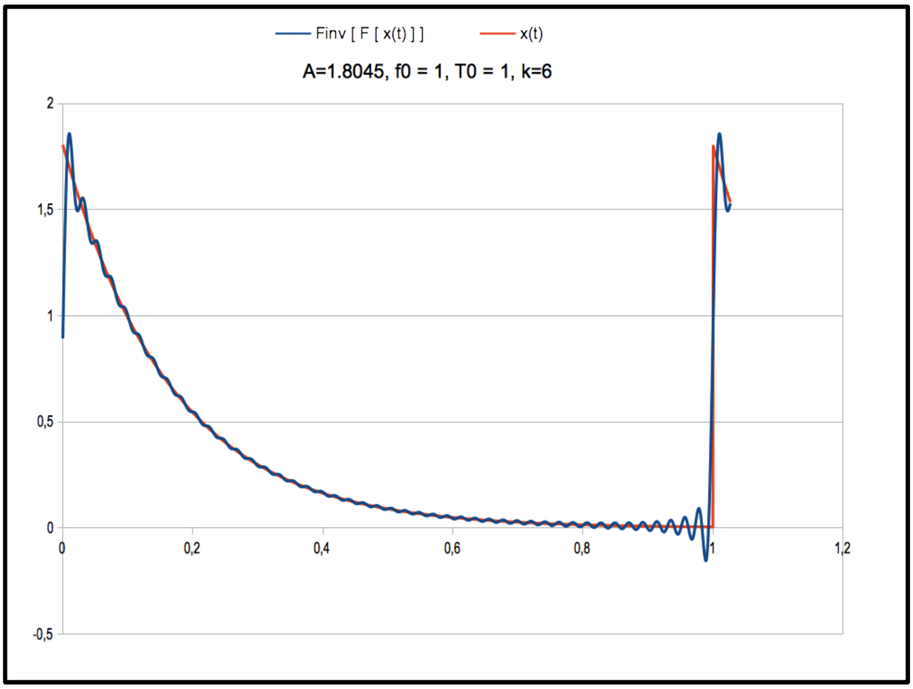

fig. 7

In fig.8 invece è mostrato il modulo dei coefficienti delle prime 10 armoniche.

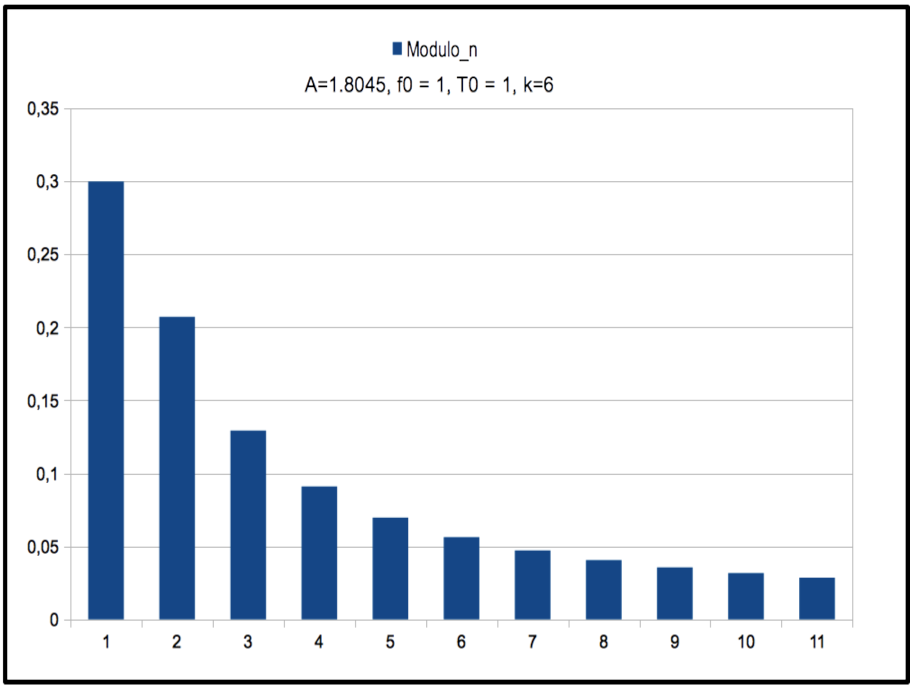

fig. 8

Infine si mostra la fase dei coefficienti delle prime 10 armoniche.

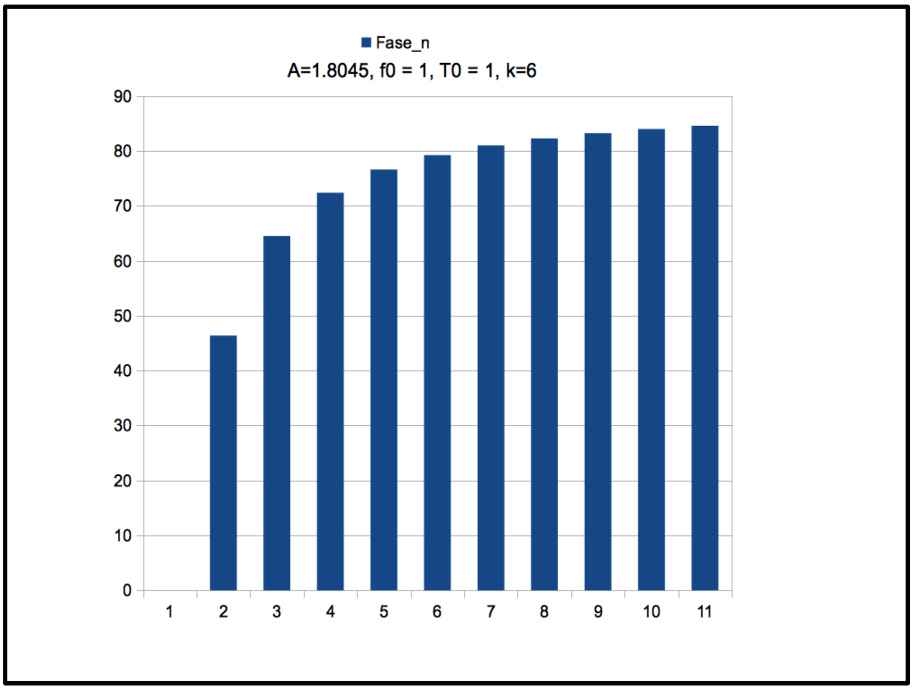

fig. 9

Enunciate alcune delle più considerevoli funzioni valide per la composizione di segnali di test, possiamo intraprendere lo studio di una funzione che è curiosamente singolare: la funzione che si incontra in taluni casi, quando un sistema ha tra i suoi poli caratteristici, una coppia di poli reali coincidenti, presumibilmente a parte reale negativa.
Dichiariamo quindi la seguente funzione periodica, di periodo T_0:

$$x(t) = A\frac{t}{T_0}e^{\frac{-kt}{T_0}}, \quad 0 \leq t \leq T_0$$

Prima di affrontare il consueto esercizio di calcolo dei coefficienti della serie di Fourier, possiamo effettuare il calcolo di un integrale indefinito, che ci sarà utile successivamente per sostituzione.

$$\int \gamma t e^{-at} cos(bt) dt =$$

ancora una volta, l'integrazione per parti è utile ed efficace in questo contesto

$$= \gamma \cdot t \cdot e^{-at}\frac{bsin(bt) - acos(bt)}{a^2 + b^2} - \gamma \int e^{-at}\frac{bsin(bt) + acos(bt)}{a^2 + b^2}dt =$$

ricorrendo agli integrali già sviluppati nel corso del calcolo dei coefficienti della funzione $e^{-\frac{kt}{T}}$

$$= \gamma \cdot t \cdot e^{-at}\frac{bsin(bt) - acos(bt)}{a^2 + b^2} - \frac{\gamma}{a^2 + b^2}\left\{b\frac{e^{-at}\big[-bcos(bt) - asin(bt)\big]}{a^2 + b^2} - a\frac{e^{-at}\big[bsin(bt) - acos(bt)\big]}{a^2 + b^2}\right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{a^2 + b^2}\left\{t \cdot e^{-at} \cdot \big[bsin(bt) - acos(bt)\big] + \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} \cdot \big[absin(bt) - a^2cos(bt) + b^2cos(bt) + absin(bt)\big]\right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{a^2 + b^2}\left\{t \cdot e^{-at} \cdot \big[bsin(bt) - acos(bt)\big] + \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} \cdot \big[2absin(bt) + (b^2 - a^2)cos(bt)\big]\right\}$$

Raggiunto questo preliminare traguardo, si può sostituire le seguenti quantità nella funzione appena calcolata:

$$\gamma := \frac{A}{T_0}$$

$$a := \frac{k}{T_0}$$

$$b := 2\pi n f_0$$

ottenendo quindi

$$X_{0,n} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A\frac{t}{T_0}e^{\frac{-kt}{T_0}} cos(2\pi n f_0 t) dt =$$

$$= \frac{A}{{T_0}^2(\frac{k^2}{{T_0}^2} + 4\pi n^2 f_0^2)}\left\{t \cdot e^{-\frac{kt}{T_0}} \cdot \big[2\pi n f_0 sin(2\pi n f_0 t) - \frac{k}{T_0}cos(2\pi n f_0 t)\big] + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{kt}{T_0}}}{\frac{k^2}{T_0^2} + 4\pi^2 n^2 {f_0}^2} \cdot \big[4\frac{k}{T_0}\pi n f_0 sin(2\pi n f_0 t) + (4\pi^2 n^2 {f_0}^2 - \frac{k^2}{{T_0}^2})cos(2\pi n f_0 t)\big]\right\}\Bigg|_0^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{(k^2+4\pi^2n^2)}\Bigg\{e^{-k}\big[2\pi n sin(2\pi n) - k cos(2\pi n) + \frac{1}{k^2+4\pi^2n^2}\cdot(4k\pi n sin(2\pi n) + (4\pi^2n^2-k^2)cos(2\pi n))\big] +$$

$$-\frac{4\pi^2n^2-k^2}{k^2+4\pi^2n^2}\Bigg\} =$$

$$= \frac{A}{(k^2+4\pi^2n^2)}\Bigg\{e^{-k}\big(-k+\frac{4\pi^2n^2-k^2}{k^2+4\pi^2n^2}\big) - \frac{4\pi^2n^2-k^2}{k^2+4\pi^2n^2}\Bigg\} =$$

$$= \frac{A}{(k^2+4\pi^2n^2)}\Bigg\{\frac{k^2-4\pi^2n^2}{k^2+4\pi^2n^2}\cdot(1-e^{-k}) - ke^{-k}\Bigg\}$$

Verificando il valor medio del segnale ricostruito, otteniamo per n=0:

$$X_{0,0} = \frac{A}{k^2}\Bigg\{1 - e^{-k} - k\cdot e^{-k}\Bigg\}$$

che è appunto il valor medio della funzione x(t) nell'intervallo $[0, T_0]$.
Facciamo adesso l'esercizio di calcolare anche i coefficienti in quadratura; si tratta di sviluppare anzitutto l'integrale indefinito:

$$\int \gamma t e^{-at} sin(bt)dt =$$

procedendo analogamente a quanto già fatto otteniamo:

$$= \gamma\cdot t\cdot e^{-at}\frac{-bcos(bt)-asin(bt)}{a^2+b^2} - \gamma\int e^{-at}\frac{-bcos(bt)-asin(bt)}{a^2+b^2}dt =$$

$$= \gamma\cdot t\cdot e^{-at}\frac{-bcos(bt)-asin(bt)}{a^2+b^2} + \gamma\frac{1}{a^2+b^2}\Bigg\{\frac{be^{-at}}{a^2+b^2}\big[bsin(bt)-acos(bt)\big] + \frac{ae^{-at}}{a^2+b^2}\big[-bcos(bt)-asin(bt)\big]\Bigg\} =$$

$$= \gamma\cdot t\cdot e^{-at}\frac{-bcos(bt)-asin(bt)}{a^2+b^2} + \gamma\frac{1}{a^2+b^2}\Bigg\{\frac{e^{-at}}{a^2+b^2}\big[(b^2-a^2)sin(bt) - 2abcos(bt)\big]\Bigg\} =$$

Possiamo di nuovo adottare la sostituzione

$$\gamma := \frac{A}{T_0}$$

$$a := \frac{k}{T_0}$$

$$b := 2\pi n f_0$$

ottenendo quindi

$$X_{1,n} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A\frac{t}{T_0}e^{\frac{-kt}{T_0}} sin(2\pi n f_0 t)dt =$$

$$= \frac{A}{{T_0}^2}\cdot\frac{e^{-\frac{kt}{T_0}}}{\frac{k^2}{{T_0}^2}+4\pi^2n^2f_0^2}\Bigg\{-2\pi n f_0 t cos(2\pi n f_0 t) - \frac{kt}{T_0}sin(2\pi n f_0 t) +$$

$$+ \frac{1}{\frac{k^2}{{T_0}^2}+4\pi^2n^2f_0^2}\big[(4\pi^2n^2f_0^2 - \frac{k^2}{{T_0}^2})sin(2\pi n f_0 t) - 4\frac{k}{T_0}\pi n f_0 cos(2\pi n f_0 t)\big]\Bigg\}\Bigg|_0^{T_0} =$$

$$= \frac{A}{{T_0}^2}\cdot\frac{e^{-k}}{\frac{k^2}{{T_0}^2}+4\pi^2n^2f_0^2}\Bigg\{-2\pi n f_0 T_0 cos(2\pi n f_0 T_0) - ksin(2\pi n f_0 T_0) +$$

$$+\frac{1}{\frac{k^2}{{T_0}^2}+4\pi^2n^2f_0^2}\left[(4\pi^2n^2f_0^2-\frac{k^2}{{T_0}^2})sin(2\pi nf_0T_0)-\frac{4k}{T_0}\pi nf_0cos(2\pi nf_0T_0)\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{A}{{T_0}^2}\cdot\frac{1}{\frac{k^2}{{T_0}^2}+4\pi^2n^2f_0^2}\left\{\frac{1}{\frac{k^2}{{T_0}^2}+4\pi^2n^2f_0^2}\cdot\frac{4k}{T_0}\pi nf_0\right\}=$$

$$=\frac{Ae^{-k}}{k^2+4\pi^2n^2}\Bigg\{-2\pi ncos(2\pi n)-ksin(2\pi n)+\frac{1}{k^2+4\pi^2n^2}\left[(4\pi^2n^2-k^2)sin(2\pi n)-4k\pi ncos(2\pi n)\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{A}{k^2+4\pi^2n^2}\left\{\frac{4k\pi n}{k^2+4\pi^2n^2}\right\}=$$

$$=\frac{A}{k^2+4\pi^2n^2}\Bigg\{-2\pi ne^{-k}cos(2\pi n)-ke^{-k}sin(2\pi n)+\frac{e^{-k}}{k^2+4\pi^2n^2}\left[(4\pi^2n^2-k^2)sin(2\pi n)-4k\pi ncos(2\pi n)\right]+$$

$$+\frac{4k\pi n}{k^2+4\pi^2n^2}\Bigg\}=$$

$$=\frac{A}{k^2+4\pi^2n^2}\left\{-2\pi ne^{-k}+\frac{e^{-k}}{k^2+4\pi^2n^2}\big(-4k\pi n\big)+\frac{4k\pi n}{k^2+4\pi^2n^2}\right\}=$$

$$=\frac{A}{k^2+4\pi^2n^2}\left\{-2\pi ne^{-k}+\frac{4k\pi n}{k^2+4\pi^2n^2}\cdot(1-e^{-k})\right\}$$

Riassumendo, la funzione x(t) viene ricostruita secondo la seguente formula:

$$x(t)=X_{0,0}+2\sum_{m=1}^{\infty}X_{0,m}\,cos(2\pi mf_0t)+2\sum_{m=1}^{\infty}X_{1,m}\,sin(2\pi mf_0t)=$$

$$=\frac{A}{k^2}\left\{1-e^{-k}-k\cdot e^{-k}\right\}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A}{(k^2+4\pi^2m^2)}\left\{\frac{k^2-4\pi^2m^2}{k^2+4\pi^2m^2}\cdot(1-e^{-k})-ke^{-k}\right\}cos(2\pi mf_0t)+$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A}{k^2+4\pi^2m^2}\left\{-2\pi me^{-k}+\frac{4k\pi m}{k^2+4\pi^2m^2}\cdot(1-e^{-k})\right\}sin(2\pi mf_0t)$$

Proseguiamo, come per le altre funzioni, riportando i grafici della ricostruzione, e di modulo e fase dei coefficienti.

In fig. 10 viene mostrato il grafico di x(t) e della ricostruzione Finv[F[x(t)]].

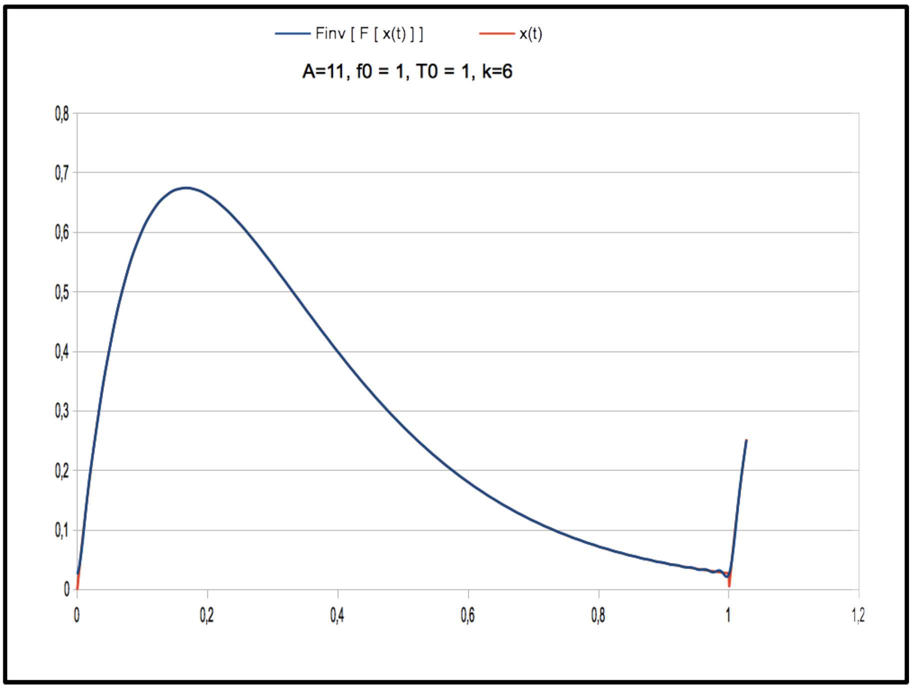

fig. 10

In fig.11 invece è mostrato il modulo dei coefficienti delle prime 10 armoniche.

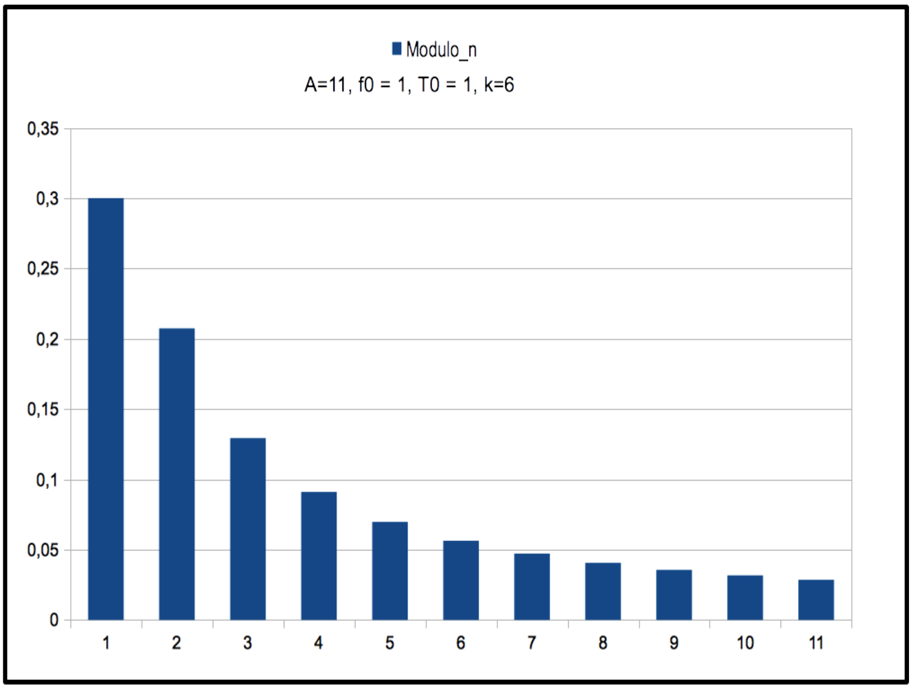

fig. 11

Infine si mostra la fase dei coefficienti delle prime 10 armoniche.

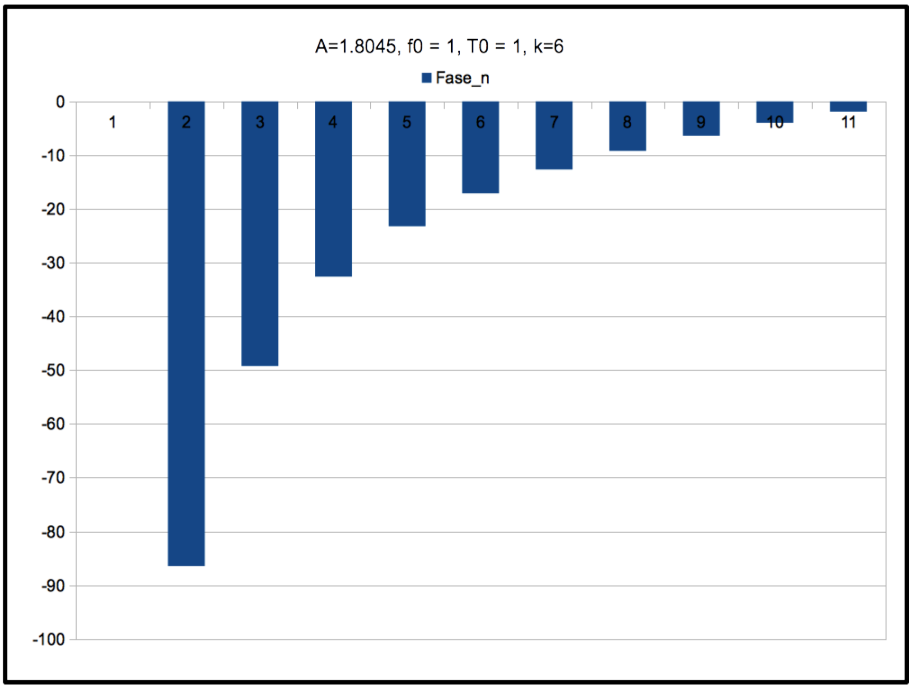

fig. 12

Infine si mostra in tabella, come varia al variare di k, la composizione del segnale ricomposto, in termini di armoniche modulo e fase.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k=1											
Mod	0,30	0,07	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Fase	0,00	65	78	82	84	85	86	86	87	87	88
k=2											
Mod	0,30	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00
Fase	0,00	20	53	65	71	75	77	79	80	82	82
k=3											
Mod	0,30	0,06	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Fase	0,00	-30	11	31	44	52	58	62	65	68	70
k=4											
Mod	0,30	0,09	0,03	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Fase	0	-58	-21	-3	9	18	25	31	36	41	44
k=5											
Mod	0,30	0,12	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
Fase	0	-75	-38	-22	-12	-6	0	4	8	12	15
k=6											
Mod	0,30	0,14	0,06	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00
Fase	0	-86	-49	-33	-23	-17	-13	-9	-6	-4	-2
k=7											
Mod	0,30	0,17	0,07	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00
Fase	0	84	-58	-40	-30	-23	-19	-16	-13	-11	-9
k=8											
Mod	0,30	0,19	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
Fase	0	76	-65	-46	-35	-28	-23	-20	-17	-15	-13
k=9											
Mod	0,30	0,20	0,10	0,06	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
Fase	0	70	-71	-51	-39	-32	-27	-23	-20	-18	-16
k=10											
Mod	0,30	0,21	0,12	0,07	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01
Fase	0	64	-77	-56	-43	-35	-30	-26	-22	-20	-18

Si nota, da k=7 in poi, una strana presenza di una fase positiva sulla prima armonica, diversamente da i risultati per $2 < k < 7$, dove la fase della prima armonica è decisamente negativa. Essendo la funzione te^{-t} la base della risposta di un sistema avente due poli reali negativi coincidenti, dovrebbe osservarsi un cambio di fase non superiore a 180 gradi. Si osservi inoltre, che questo modello è calcolato per valori di k variabili a parità di valor medio. Sarebbe interessante proporre anche la tabella analoga, variando k, a parità di energia del segnale sull'intera banda di interesse.