Note sul raggio di curvatura di una funzione

Nicola Vincenti

Pisa, Novembre 2016

In questo esempio, si prova per esercizio a dedurre attraverso lo sviluppo in serie di Taylor di una generica funzione continua e infinitamente derivabile, quale possa essere il raggio di curvatura della della funzione nell'intorno di un generico punto x_0 del suo dominio.
Si prova successivamente a fare qualche esempio che dia conferma del risultato ottenuto.

Si rammenta dapprima lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al secondo ordine della generica funzione $f(x)$:

$$f(x_0+\delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\delta x + \frac{f''(x_0)^2\cdot\delta x^2}{2} + o(x-x_0)^3$$

Considerando poi che il punto di coordinate $(x_0+\delta x, f(x_0+\delta x))$ deve appartenere al cerchio oggetto della ricerca, e che lo stesso discorso è egualmente sostenibile per δx cambiato di segno, intuiamo che possiamo scrivere l' equazione del cerchio nel seguente modo:

$$(x_0+\delta x - x_c)^2 + (f(x_0+\delta x) - y_c)^2 = (x_0-x_c)^2 + (y_0-y_c)^2$$

Sostituendo al posto di $f(x_0+\delta x)$ la sua approssimazione in serie di Taylor, e trascurando fin da subito i termini superiori al secondo ordine, otteniamo

$$(x_0+\delta x - x_c)^2 + [f(x_0) + f'(x_0)\cdot\delta x + \frac{f''(x_0)\cdot\delta x^2}{2} - y_c]^2 = (x_0-x_c)^2 + (y_0-y_c)^2$$

procedendo allo svolgimento dei calcoli si ha

$$x_0^2+\delta x^2+x_c^2+2x_0\delta x-2x_0x_c-2x_c\delta x+y_0^2+f'^2(x_0)\cdot\delta x^2+\frac{f''^2(x_0)\cdot\delta x^4}{4}+y_c^2+2y_0f'(x_0)\delta x+y_0f''(x_0)\cdot\delta x^2+$$

$$-2y_0y_c + f'(x_0)f''(x_0)\delta x^3 - 2f'(x_0)y_c\delta x - f''(x_0)y_c\delta x^2 = x_0^2 + x_c^2 - 2x_0x_c + y_0^2 + y_c^2 - 2y_0y_c$$

$$\delta x^2 + 2x_0\delta x - 2x_c\delta x + f'^2(x_0)\cdot\delta x^2 + \frac{f''^2(x_0)\cdot\delta x^4}{4} +$$

$$+2y_0f'(x_0)\delta x + y_0f''(x_0)\cdot\delta x^2 + f'(x_0)f''(x_0)\delta x^3 - 2f'(x_0)y_c\delta x - f''(x_0)y_c\delta x^2 = 0$$

trascurando i termini δx^3 e δx^4 otteniamo

$$\delta x^2\cdot(1+f'^2(x_0)+f''(x_0)y_0-f''(x_0)y_c) + \delta x\cdot(2x_0-2x_c+2f'(x_0)(y_0-y_c)) = 0$$

Possiamo adesso scrivere le due equazioni nel caso si prenda in esame le quantità δx e $-\delta x$, e dunque

$$\delta x^2\cdot(1+f'^2(x_0)+f''(x_0)y_0-f''(x_0)y_c) + \delta x\cdot(2x_0-2x_c+2f'(x_0)(y_0-y_c)) = 0$$

$$\delta x^2\cdot(1+f'^2(x_0)+f''(x_0)y_0-f''(x_0)y_c) - \delta x\cdot(2x_0-2x_c+2f'(x_0)(y_0-y_c) = 0$$

sommando membro a membro si ricava:

$$y_0 - y_c = -\frac{1+f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$$

mentre sottraendo membro a membro si ha:

$$x_0 - x_c = -f'(x_0)(y_0 - y_c)$$

e dunque le coordinate del centro sono:

$$y_c = y_0 + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}, \quad x_c = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$$

infine, ricordando che vale la relazione:

$$R^2 = (x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2$$

risulta essere:

$$R^2 = \left\{ \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \right\}^2 \cdot (f'(x_0)^2 + 1)$$

e quindi:

$$R = \frac{\sqrt{\left\{ 1 + f'^2(x_0) \right\}^3}}{\mid f''(x_0) \mid}$$

Sia dato dunque un arco di circonferenza descritto dalla funzione $f(x), \quad x \in]0, 2[, \quad f(x) > 0$

$$(x - x_c)^2 + (f(x) - y_c)^2 = 1$$

e siano x_c, y_c pari a 1 e 0 rispettivamente. Allora la equazione dell arco può essere riscritta tramite la relazione:

$$f^2(x) + y_c^2 - 2y_c f(x) + x^2 + x_c^2 - 2xx_c = 1$$

ricaviamo anzitutto f(x)

$$f^2(x) - 2y_c f(x) + y_c^2 + x^2 + x_c^2 - 2xx_c - 1 = 0$$

$$f(x) = \frac{+2y_c + \sqrt{-4x^2 - 4x_c^2 + 8xx_c + 4}}{2} = y_c + \sqrt{-x^2 - x_c^2 + 2xx_c + 1} = \sqrt{-x^2 + 2x}$$

$$f'(x) = \frac{-x + x_c}{\sqrt{-x^2 - x_c^2 + 2xx_c + 1}} = \frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x}}$$

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{-x^2 - x_c^2 + 2xx_c + 1} + (-x + x_c)\frac{2x - 2x_c}{2\sqrt{-x^2 - x_c^2 + 2xx_c + 1}}}{-x^2 - x_c^2 + 2xx_c - 1} =$$

$$= \frac{x^2 + x_c^2 - 2xx_c - 1 - x^2 - x_c^2 + 2xx_c}{(-x^2 - x_c^2 + 2xx_c + 1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(-x^2 - x_c^2 + 2xx_c + 1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(-x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}}$$

Esempio:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) = -1$$

cosi che

$$R = \frac{\sqrt{\left\{1 + f'^2(x_0)\right\}^3}}{\mid f''(x_0) \mid} = 1$$

oppure

$$f(0.5) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(0.5) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f''(0.5) = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

cosi che

$$R = \frac{\sqrt{\left\{1 + f'^2(x_0)\right\}^3}}{\mid f''(x_0) \mid} = \frac{\frac{8}{3\sqrt{3}}}{\mid -\frac{8}{3\sqrt{3}} \mid} = 1$$