Autore: Nicola Vincenti Data: 15 Novembre 2014

Note sul tempo di vita media medio nell'esperimento: accensione di una lampadina

Queste brevi note sull'argomento non sono ovviamente né complete né imperfettibili, tuttavia possono essere di aiuto come punto di partenza per fare qualche considerazione sul tema della ripetibilità e della possibilità di prevedere o stimare la durata di un dispositivo accuratamente fabbricato su scala industriale.

Sia stabilita la relazione probabilità di rompere la lampadina all'accensione della stessa:

$$P(rotto)=q$$

di conseguenza possiamo dedurre che se gli eventi di accensione della lampadina sono tra loro indipendenti, otteniamo:

$$P(si\ accende\ k\ volte\ consecutive\ senza\ rompersi)=(1-q)^k$$

mentre la probabilità che si rompa durante una delle k accensioni risulta:

$$P(si\ rompe\ durante\ i\ k\ tentativi)=1-(1-q)^k$$

Introduciamo ora il concetto di MTBF (mean time before failure), preso un grande numero di lampadine, mediamente quante accensioni sopportano ciascuna prima di rompersi. Date le definizioni di cui sopra, possiamo ragionare nel seguente modo: se la probabilità di non rompersi alla prima accensione è $1-q$, alla seconda è $(1-q)^2$, alla terza è $(1-q)^3$ e così via. Allora, potremmo pesare ciascuna delle lampadine, con il numero di accensioni senza rottura, moltiplicate per la probabilità che si rompa proprio all'accensione k-esima. Quindi, posto $z=1-q$, avremo:

$$\sum_{k=1}^{N} k\cdot z^{k-1}\cdot(1-z)=(1-z)\cdot\sum_{k=1}^{N} k\cdot z^{k-1}$$

sviluppiamo il termine dentro la sommatoria, torniamo dopo sul calcolo del MTBF:

$$\sum_{k=1}^{N} k\cdot z^{k-1}=1\cdot z^0+2\cdot z^1+3\cdot z^2+....+N\cdot z^{N-1}$$

sottraendo ambo i membri la quantità: $0+z+2\cdot z^2+3\cdot z^3+....+(N-1)\cdot z^{N-1}$ otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{N} k\cdot z^{k-1}-(0+z+2\cdot z^2+3\cdot z^3+....+(N-1)\cdot z^{N-1})=1+z+z^2+z^3+....+z^{N-1}$$

dove al secondo membro si riconosce facilmente la serie di potenze, quindi:

$$\sum_{k=1}^{N} k\cdot z^{k-1}-\sum_{k=1}^{N-1} k\cdot z^{k}=\frac{1-z^N}{1-z}$$

$$\sum_{k=1}^{N} k\cdot z^{k-1}-z\cdot\sum_{k=1}^{N-1} k\cdot z^{k-1}=\frac{1-z^N}{1-z}$$

$$N\cdot z^{N-1}+(1-z)\cdot\sum_{k=1}^{N-1} k\cdot z^{k-1}=\frac{1-z^N}{1-z}$$

$$(1-z)\cdot\sum_{k=1}^{N-1} k\cdot z^{k-1}=\frac{1-z^N}{1-z}-N\cdot z^{N-1}$$

quindi il termine che stavamo sviluppando, è algebricamente equivalente a:

$$\sum_{k=1}^{N} k \cdot z^{k-1} = \frac{1-z^{N+1}}{1-z^{2}} - \frac{(N+1) \cdot z^{N}}{1-z}$$

e quindi, tornando all'accensione delle lampadine

$$(1-z) \cdot \sum_{k=1}^{N} k \cdot z^{k-1} = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} + (N+1) z^{N}$$

la quantità di cui sopra corrisponde al valore medio di accensioni della lampadina prima che essa si rompa, calcolato su un insieme di N lampadine. In definitiva, quindi, sommando tutti i contributi per N tendente a ∞ , otteniamo:

MTBF = $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{q}$

Esempio:

se la probabilità di rompere la lampadina all'accensione è 1 su 10000, allora il numero di accensioni medio prima che essa si rompa è proprio 10000, come è intuitivo che sia.

Rimane tuttavia interessante fare una osservazione: il numero di lampadine su cui si può effettuare l'esperimento non potrà mai essere infinito, e la cosa abbastanza sorprendente, è che se osserviamo quante accensioni otteniamo mediamente senza rottura, ci accorgiamo che questa quantità è superiore al valore di 1/q per alcuni valori di N. In un contesto commerciale quindi, dovrebbe esistere una quantità ottimale di produzione di dispositivi che, in termini statistici ottimizza la resa (minimizza il numero medio di rotture). Basterà quindi studiare la funzione:

$$\aleph(N) = (1-z) \cdot \sum_{k=1}^{N} k \cdot z^{k-1} = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} + (N+1) z^{N}$$

al variare di $N \in \mathbb{N}$.

E' possibile quindi partire da queste poche considerazioni iniziali per convincersi che si possono definire vari scenari per l'immissione sul mercato di un dispositivo, su volumi industriali. Diviene quindi intuitivo anche il fatto che dispositivi microelettronici sempre più miniaturizzati abbiano un tempo di immissione sul mercato sempre più veloce e un margine di guadagno superiore se venduti su scala moderata in partenza, e poi consolidate successivamente, se il mercato accoglie con favore il prodotto in questione.

Per ulteriori approfondimenti si invita il lettore a documentarsi attraverso la letteratura abbondantemente presente sull'argomento nelle riviste specializzate di varie organizzazioni accademiche quali ad esempio IEEE.