Note introduttive sul problema delle dimensioni finite

Nicola Vincenti

Pisa, Ottobre 2022

In questo breve esempio, si prova a presentare in forma abbastanza elementare, nel senso lato, del termine, alcuni piccoli ragionamenti che possano aiutare a distinguere i domini delle dimensioni finite.
Si rimanda a testi di matematica, pensati per la didattica, o a testi più avanzati nel caso sia necessario trovare delle identità proprie che esulano da un contesto semplice come questo.
Partendo da un esempio un po' fantasioso potremmo riferirci all'integrale della delta di P. Dirac per rappresentare il calcolo di una dimensione finita costante, nel dominio della dimensione nulla. Un fantasioso fisico potrebbe, nel caso avesse la testa tra le nuvole, immaginare che certe dimensioni finite siano possibili nella fisica teorica delle particelle, quelle cose di cui tutti, giustamente, hanno la possibilità di parlarne, ma spesso quasi nessuno di dare prove efficacemente consistenti sulla persistenza nella memoria di chi le ha incontrate.

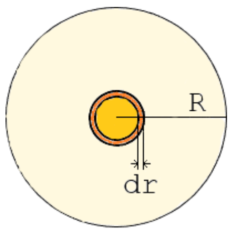
In questo caso presentiamo il noto integrale di Dirac come segue:

$\int_{0^+}^{0^-} \delta dx = cost$

Quindi, pur pensando che un giorno ci potremmo pentire di andare oltre la dimensione del nulla, partiremmo a calcolare un integrale di linea tra i più simpatici che si conoscano, la misura della lunghezza della circonferenza:

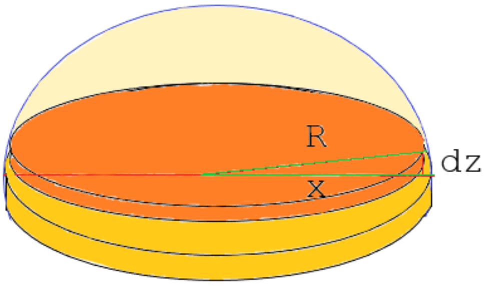
$L = \int_0^{2\pi} Rd\theta = 2\pi R$

E di conseguenza vorremo calcolare anche l'area del cerchio e il volume della sfera.
Per quanto riguarda l'area del cerchio, come suggeritoci dalla figura:
otterremo



$A = \int_0^R 2\pi r dr = \pi r^2|_0^R = \pi R^2$

Con considerazioni analoghe riguardo all'impostazione dell'integrale, osservando la figura, si può calcolare come segue:



che algebricamente si calcola nella forma:

$$V = 2 \cdot \int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz = 2 \cdot (\pi R^2 z|_0^R - \pi\frac{z^3}{3}|_0^R) = 2(\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3$$